

THÉORIE DE GALOIS DES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LOTFI SAÏDANE

ABSTRACT. Let k be a differential field and C its subfield of constants. In general a differential extension K of k add some new constants to C , and it is difficult to prove that C stay unchangeable under the extension K ; This situation is provided by the Picard-Vessiot extension. Kolchin [6] prove the theorem of existence and unicity for these extensions. The aim of this paper is to prove Kolchin theorem and other results, in a simple manner, by means of the theory of models and logic.

RÉSUMÉ: Soit k un corps différentiel et C son sous corps des constantes. En général une extension différentiel K de k modifie le corps des constantes C de k . Prouver que K ne modifie pas C est un problème assez difficile en algèbre différentiel. Les extensions de Picard-Vessiot constitue un exemple de cette situation. Kolchin [6] a montré le théorème d'existence et d'unicité, à isomorphisme près, des extensions de Picard-Vessiot sous la condition que le corps C est algébriquement clos. Dans ce travail on utilise la théorie des corps différentiellement clos (Théorie des modèles), pour montrer l'existence et l'unicité, à isomorphisme près, des extensions de Picard-Vessiot. On calcul ensuite le groupe de Galois différentiel de certaines extensions particulière. Enfin, on montre quelque théorèmes généraux de la théorie de Galois différentielle par les mêmes techniques.

1. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Un anneau différentiel, est un anneau commutatif A , muni d'une dérivation, c'est à dire d'une application $\delta : A \rightarrow A$ satisfaisant pour tout x et y dans A , $\delta(x+y) = \delta x + \delta y$ et $\delta(xy) = x\delta y + y\delta x$. Par exemple, l'anneau des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} muni de la dérivation $\partial/\partial z$; l'anneau des séries formelles sur un corps k (quelconque), $k[[x]]$ muni

Date: 15 Decembre 2002.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 12H05.

Key words and phrases. Corps différentiels, corps différentiellement clos extension différentiel, extension de Picard-Vessiot, groupes algébrique des matrices, groupe de Galos différentiel.

de la dérivation $\partial/\partial x$; sont des anneaux différentiels. On appelle constante de A , les éléments de A de dérivée nulle. Les constantes forment un sous anneau de A . On appelle idéal différentiel de A , tout idéal I de A vérifiant $\delta I \subset I$. Si A est anneau différentiel intègre sa dérivation s'étend de manière unique à son corps des fractions. Naturellement un corps différentiel est un corps muni d'une dérivation. Les constantes d'un corps différentiel constituent un corps. Pour la suite de ce travail, on ne considère que des corps différentiels de caractéristique zéro. Soit k un corps différentiel, on note par $k\{x\}$ l'anneau $k[x, x', x'', \dots, x^{(n)}, \dots]$, où $n \in \mathbb{N}$, des polynômes en une infinité dénombrable de variables, muni de l'unique dérivation prolongeant celle de k , qu'on note ∂ , vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\partial x^{(n)} = x^{(n+1)}$. On appelle "type" en une variable à coefficient dans k , tout idéal différentiel premier de $k\{x\}$ distinct de $k\{x\}$, ce dernier est exclu de l'ensemble des idéaux différentiels premiers. Soient $K \supset k$ une extension de corps différentiel, a et b deux éléments de K . On dit que a et b ont "même type" sur k , s'il existe un isomorphisme entre $k\{a\}$ et $k\{b\}$ qui fixe les éléments de k et associe $\partial^n a$ à $\partial^n b$ ($n \in \mathbb{N}$). L'application $\varphi : k\{x\} \rightarrow k\{a\}$, qui à $P(x)$ associe $P(a)$ est un homomorphisme d'anneau différentiel, son noyau est un idéal différentiel premier, qu'on note par I_a (idéal des équations à coefficients dans k satisfaites par a). On a, $k\{a\} \simeq k\{x\}/I_a$ et le corps des fractions de $k\{a\}$, soit $k\langle a \rangle$, est isomorphe au corps des fractions de $k\{x\}/I_a$. Deux éléments a et b dans $K \supset k$, ont alors "même type" sur k si et seulement si $I_a = I_b$. L'idéal I_a est appelé type de a . Tout idéal différentiel premier de $k\{x\}$ est le type d'un élément a dans une extension différentielle de k . L'ensemble des types en une variable à coefficients dans k (ou encore 1-type) est noté $S_1(k)$.

1.1. Topologie de $S_1(k)$. Soit P un élément de $k\{x\}$, on note par $\langle P \rangle$ l'idéal, au sens habituel, engendré par P et ses dérivées successives, c'est le plus petit idéal différentiel contenant P . Plus généralement, si \mathcal{P} est un ensemble de polynômes différentiels de $k\{x\}$, l'idéal $\langle \mathcal{P} \rangle$ est le plus petit idéal différentiel contenant \mathcal{P} .

Définition 1. On appelle ordre de $P \in k\{x\} \setminus k$, le plus grand ordre de la dérivée de x qui intervient dans P .

Par convention, le polynôme nul n'a pas d'ordre et les éléments de k^* sont d'ordre -1 .

Définition 2. Soit $P \in k\{x\}$ d'ordre $n \geq 0$, on appelle séparante de P , et on note S_P le polynôme $\delta P / \delta x^{(n)}$.

La séparante de P est un polynôme non nul et d'ordre inférieur ou égal à celui de P . Si P et S_P sont d'ordre égal à N , alors le

degré partiel en $x^{(N)}$ dans S_P est strictement inférieur à celui de P . D'où, un polynôme ne divise pas sa séparante. Soit P un polynôme différentiel d'ordre $N \geq 0$, sans facteur commun avec sa séparante, alors l'idéal différentiel $\langle P \rangle$ ne contient pas de polynômes différentiels d'ordre strictement inférieur à N et ses éléments d'ordre N sont multiples de P , voir [4, 3] pour une démonstration de ce résultat et des deux Lemmes qui vont suivre.

Lemme 1. *Soit P un polynôme différentiel irréductible d'ordre $N \geq 0$. On considère l'ensemble $I(P)$, des polynômes différentiels Q vérifiant pour m assez grand $(S_P)^m Q \in \langle P \rangle$. Alors $I(P)$ est un idéal différentiel premier contenant P et ne contenant aucun élément d'ordre strictement inférieur à N . Les éléments d'ordre N de $I(P)$ sont multiples de P .*

Preuve. Pour la démonstration voir [4] □

Lemme 2. *Tout idéal différentiel premier non nul est de la forme $I(P)$.*

Preuve. Pour la démonstration voir [4] □

Proposition 1. *L'idéal $I(P)$ est le plus petit idéal différentiel premier contenant P et ne contenant pas S_P .*

Preuve. Soit I un idéal différentiel premier contenant P et ne contenant pas S_P . Soit $Q \in I(P)$, il existe alors m dans \mathbb{N} tel que $S_P^m Q \in \langle P \rangle$, comme $S_P \notin I \supset \langle P \rangle$, alors $Q \in I$ et $I(P) \subset I$. □

Exemple 1. *Si $P = (X')^2 - 2X$ est dans $k\{x\}$, P est irréductible indépendamment du corps k choisi. Sa séparante $S_P = 2X'$. En vertu de la discussion précédant le Lemme 1, l'idéal différentiel $\langle P \rangle$ ne contient pas S_P . Tout idéal différentiel qui contient P et S_P contient X , le plus petit étant $\langle X \rangle$ ($I_X = \langle X \rangle$). On remarque que l'idéal différentiel $\langle X \rangle \not\subset I_P$, car sinon X' serait dans I_P . Le polynôme dérivée de P , $P' = 2X'X'' - 2X' = 2X'(X'' - 1)$, comme I_P est premier et $X' \notin I_P$ alors $X'' - 1 \in I_P$ mais $X'' - 1 \notin \langle X \rangle$ et $I_P \not\subset \langle X \rangle$. L'intersection des idéaux différentiels I_P et $\langle X \rangle$, étant un idéal différentiel contenant $\langle P \rangle$ et ne contenant pas S_P , de la proposition 1 on déduit que $\langle P \rangle = I_P \cap \langle X \rangle$.*

En général, avec la condition d'irréductibilité, les idéaux différentiels I_Q et $\langle Q \rangle$, sont identiques. L'exemple précédent établit une situation de différence.

Les idéaux différentiels premiers sont de la forme I_P , où P est un polynôme différentiel irréductible (Lemme 2). On a une bijection entre $S_1(k)$ et l'ensemble des polynômes différentiels irréductibles.

Proposition 2. *Tout idéal différentiel premier qui contient un polynôme différentiel irréductible P d'ordre $N \geq 0$ et qui n'est pas I_P contient un élément d'ordre strictement inférieur à N .*

Preuve. Soit I un idéal différentiel premier, d'après le lemme 2, il existe alors un polynôme différentiel irréductible Q tel que $I = I_Q$. Comme l'ordre de Q est inférieur ou égal à N , car $P \in I$ et le lemme 1. On suppose que l'ordre de Q est égal à N , le polynôme Q diviserait alors P , ce qui contredit le fait que P est irréductible. \square

Remarque 1. *Soit a un élément d'une extension différentielle K de k . Supposons que le type de a sur k est I_P , où P est un polynôme différentiel irréductible d'ordre $N \geq 0$. Alors N est le degré de transcendance au sens algébrique du corps $k(a)$ sur k .*

Soit P un polynôme différentiel irréductible de $k\{x\}$, on considère l'ensemble $\mathcal{O}_P = \{I \in S_1(k) \mid P \in I\}$. On munit $S_1(k)$ de la topologie, appelée topologie de Stone, dont une base d'ouverts est constituée par l'ensemble des \mathcal{O}_P .

Proposition 3. *L'ensemble $S_1(k)$ est compact et les ouverts fermés de $S_1(k)$ sont exactement les \mathcal{O}_P .*

Preuve. Voir [2] \square

Définition 3. *soit K un corps différentiel, K est dit différentiellement clos si tout système de la forme:*
$$\begin{cases} P(X) = 0 \\ Q(X) \neq 0 \end{cases}$$
où l'ordre de Q est strictement inférieur à celui de P , à coefficients dans K a une solution dans K .

Exemple 2. $\begin{cases} X''X - X' = 0 \\ X' \neq 0 \end{cases}$

On remarque qu'un corps différentiellement clos est algébriquement clos. Il suffit de considérer un système constitué par une équation polynomiale, c'est à dire d'ordre 0 et une inéquation constante, d'ordre -1 .

Lemme 3. *Tout corps différentiel se plonge dans un corps différentiellement clos.*

Définition 4. *Le wronskien de n éléments y_1, \dots, y_n dans un anneau différentiel est le déterminant de la matrice de wronsky*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Thorme 1. *Soit K un corps différentiel, son corps des constantes étant C ; n éléments de K sont linéairement dépendants sur C si et seulement si leurs wronskien est nul.*

Proof. Supposons que y_1, \dots, y_n sont linéairement dépendants sur C . Soit C_1, \dots, C_n , non tous nul, dans C tel que $\sum_{i=1}^n C_i y_i = 0$. En dérivant cette équation $(n-1)$ fois, on obtient alors n équations en (C_1, \dots, C_n) de la forme $\sum_{i=1}^n C_i y_i^{(j)} = 0$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Comme ce système admet une solution non triviale (C_1, \dots, C_n) on déduit que le wronskien de (y_1, y_2, \dots, y_n) est nul. Pour prouver la réciproque, supposons que le wronskien de (y_1, y_2, \dots, y_n) est nul. On peut alors trouver dans K^n une solution non triviale (C_1, C_2, \dots, C_n) du système $\sum_{i=1}^n C_i y_i^{(j)} = 0$, $j = 0, \dots, n-1$. Sans pertes de généralités, on peut supposer que $C_1 = 1$ et le wronskien de (y_2, \dots, y_n) non nul. En effet, K est un corps, on peut multiplier par l'inverse de C_1 (supposé non nul) le système d'équations. Si le wronskien de (y_2, \dots, y_n) est nul, on peut trouver dans K^{n-1} une solution non triviale (C_2, \dots, C_n) du système $\sum_{i=2}^n C_i y_i^{(j)} = 0$, $j = 0, 1, \dots, n-2$. On peut supposer que $C_2 = 1$, pour les mêmes raisons que précédemment, le wronskien de (y_3, \dots, y_n) est soit nul, soit non nul. Si pour tout $k = 1, \dots, n-1$ le wronskien de (y_k, \dots, y_n) est nul, par le procédé déjà utilisé, on obtient des solutions $\{C_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n-1$ du système qui sont égales soit à zéro soit à 1, ainsi que le système:

$$\begin{cases} y_{n-1} + c_n y_n &= 0 \\ y'_{n-1} + c_n y'_n &= 0 \end{cases}$$

avec le wronskien de (y_{n-1}, y_n) nul donc $y_{n-1} y'_n - y'_{n-1} y_n = 0$. Comme $C_n = -\frac{y_{n-1}}{y_n}$ on a $C'_n = -\frac{y'_{n-1} y_n - y_{n-1} y'_n}{y_n^2} = 0$ donc C_n est une constante, et le système (y_1, \dots, y_n) est linéairement dépendant sur les constantes. S'il existe $k = 1, \dots, n-1$ tels que le wronskien de (y_k, \dots, y_n) soit non nul, on dérive $(n-1)$ fois l'équation $y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_{k-1} y_{k-1} + \dots + C_n y_n$ où C_2, \dots, C_{k-1} sont soit zéro soit 1. De l'hypothèse sur le wronskien de (y_1, y_2, \dots, y_n) , on déduit l'existence d'une solution non triviale (C_2, \dots, C_n) du système homogène $y_1^{(j)} + \sum_{i=2}^n C_i y_i^{(j)} = 0$, $j = 0, \dots, n-1$. D'où, après simplification du système initial on obtient, $\sum_{i=k}^n C'_i y_i^{(j)} = 0$, $j = 0, \dots, k-1$ comme le wronskien de (y_k, \dots, y_n) est non nul, on déduit que $C'_k = C'_{k+1} = \dots = C'_n = 0$ et les C_i sont des constantes. \square

2. EXTENSION DE PICARD-VESSIOT

On considère l'équation différentielle linéaire homogène

$$(*) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

où les coefficients a_i sont dans un corps différentiel K .

Soit u_1, \dots, u_n des solutions de l'équation dans une certaine extension de K . On dit que (u_1, \dots, u_n) forme un système fondamental de solutions si leurs wronskien est non nul.

Définition 5. Soit $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ une équation différentielle linéaire, les coefficients a_i sont dans K .

On dit que le corps $M \supseteq K$ est une extension de Picard-Vessiot de K si :

- 1) $M = K(u_1, \dots, u_n)$ où (u_1, \dots, u_n) est un système fondamental de solution.
- 2) M a le même corps de constantes que K

2.1. Existence des extensions de Picard-Vessiot. Pour montrer l'existence des extensions de Picard-Vessiot on plonge K dans un corps différentiellement clos L (on peut prendre $L = M(k)$ clôture différentielle de K , voir lemme 3 et pour plus de détails [4] chapitre IV). On considère le système:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y &= 0 \\ y' &\neq 0 \end{cases}$$

Les coefficients sont dans L , on suppose que $n > 1$ (le cas $n = 1$ est trivial); puisque L est un corps différentiellement clos. Ce système admet une solution dans L notée u_1 .

On considère ensuite le système

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y &= 0 \\ y' u_1 - u_1' y &\neq 0 \end{cases}$$

Pour les mêmes raisons, ce système admet une solution u_2 dans L . Par induction on obtient les solutions u_1, u_2, \dots, u_{m-1} , $m \leq n$. On considère, alors, le système

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= 0 \\ w(y, u_1, \dots, u_{m-1}) &\neq 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution notée u_m , puisque $w(y, u_1, \dots, u_{m-1})$ est une équation différentielle linéaire d'ordre $(m-1)$ en y . Comme $m-1 < n$ et L est différentiellement clos, le système précédent admet une solution notée u_m dans L . (u_1, \dots, u_n) est un système fondamental de solutions puisque $w(u_1, \dots, u_n) \neq 0$. Montrons que dans la clôture différentielle, l'extension $K(u_1, \dots, u_n)$ est de Picard-Vessiot. Pour cela regardons le corps des constantes de $K(u_1, \dots, u_n)$.

On considère l'ouvert fermé pour la topologie de Stone de la forme $\langle x' = 0 \rangle$ (voir Proposition 3 et pour plus de détails [2] Proposition 1, page1-04), il contient d'une part les types des constantes de K

et d'autre par les types des éléments constants transcendants sur K . Comme l'ensemble des 1-types $S_1(K)$ est compact (Proposition 3) $\langle x' = 0 \rangle$ est aussi un compact puisqu'il est fermé dans $S_1(K)$. Comme les types des constantes sont isolés (puisque'ils sont réalisés), le type de la constante transcendante est alors non isolé dans $S_1(K)$ car sinon $\langle x' = 0 \rangle$ serait fini puisqu'il est compact, ce qui contredit le fait que C est infini. Seulement la constante transcendante est dans $M(K)$, son type est alors isolé dans $S_1(K)$; contradiction.

On déduit alors que $\langle x' = 0 \rangle$ contient les constantes algébriques sur K donc algébrique sur C , supposé algébriquement clos, toutes les constantes sont alors dans C .

Remarque 2. *On peut se contenter de plonger K dans sa clôture différentielle $cl(K)$ ([4] ch.II) ça nous suffit pour la démonstration de l'existence et de l'unicité des extensions de Picard-Vessiot.*

2.2. Unicité des extensions de Picard-Vessiot.

Lemme 4. *Si $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ est un système fondamental de solutions, alors $K(\bar{u})/K$ est une extension de Picard-Vessiot si et seulement si le type de \bar{u} sur K est isolé.*

Proof. Condition nécessaire: $K(\bar{u})/K$ est une extension de Picard-Vessiot, on plonge $K(\bar{u})$ dans sa clôture différentielle $M(K(\bar{u}))$ dans laquelle il n'y a pas de nouvelles constantes; de même on plonge K dans sa clôture $M(K)$ qui se plonge dans $M(K(\bar{u}))$. Montrons que \bar{u} est donc dans $M(K)$.

On sait qu'il existe un système fondamental de solutions \bar{v} dans $M(K)$ de façon que $K(\bar{v})$ soit une extension de Picard-Vessiot de K . Comme $M(K)$ est plongé dans $M(K(\bar{u}))$ par inclusion, alors $\bar{u} = \sigma \bar{v}$ où σ est une matrice de constantes, donc \bar{u} appartient à $M(K)$ puisque K , $M(K)$ et $M(K(\bar{u}))$ ont le même corps de constantes. En conclusion le type de \bar{u} sur K est isolé dans $S_n(K)$: (car \bar{u} est dans $M(K)$).

Condition suffisante: Si le type de \bar{u} sur K est isolé alors $K(\bar{u})/K$ est une extension "atomique" (voir [4] chapitre IV), on peut alors plonger $K(\bar{u})$ dans la clôture différentielle de K . D'où, dans $K(\bar{u})$ il n'y a pas de nouvelles constantes, puisque dans la clôture différentielle de K il n'y a pas de nouvelles constantes. Comme \bar{u} est un système fondamental de solutions, $K(\bar{u})/K$ est une extension de Picard-Vessiot. Soit $K(\bar{u})/K$ et $K(\bar{v})/K$ deux extensions de Picard-Vessiot on peut les plonger dans la clôture différentielle de K puisque, d'après le lemme 4, les types de \bar{u} et de \bar{v} sur K sont isolés dans $S_n(K)$. Il existe donc un isomorphisme

de la clôture différentielle qui transforme $K(\bar{u})$ en $K(\bar{v})$. Les extensions de Picard-Vessiot sont donc uniques à un K -isomorphisme près de la clôture différentielle. \square

3. GROUPE DE GALOIS DIFFÉRENTIEL

Définition 6. Soit M un corps différentiel et K un sous corps différentiel de M . Le groupe de tous les automorphismes différentiels de M fixant K est appelé groupe de Galois différentiel de l'extension M/K , qu'on note G .

Pour tout corps différentiel intermédiaire L , on définit L' comme le sous groupe de G formé par tous les éléments qui fixent L . Pour tout sous groupe H de G on définit H' comme étant l'ensemble de tous les éléments de M qui restent fixe par H , H' est alors un corps différentiel intermédiaire entre K et M .

Lemme 5. Soit K un corps différentiel de caractéristique zéro, soit u un élément dans une extension différentielle de K vérifiant $u' = a \in K$ où a n'est pas une dérivée dans K .

Alors u est transcendant sur K , $K(u)$ est une extension de Picard-Vessiot de K et son groupe de Galois différentiel est isomorphe au groupe additif des constantes dans K .

Proof. On suppose que u n'est pas transcendant sur K , i.e u vérifie une équation polynômiale sur K . Soit $u^n + b_1 u^{n-1} + \dots + b_n = 0$ (*) supposée irréductible.

En dérivant cette équation on obtient $nu^{n-1}a + b_1' u^{n-1} + \dots = 0$ (car $u' = a$) tous les coefficients sont donc nuls car on a supposé que (*) est irréductible, on a alors $na + b_1' = 0$ ce qui entraîne $a = -b_1'/n$ donc $a = (-b_1/n)'$ ce qui contredit le fait que a n'est pas une dérivée dans K ; u est alors transcendant sur K .

Comme le type de u sur K est isolé (car l'équation minimale de u est d'ordre 1 et u est transcendant sur K) $K(u)$ est une extension de Picard-Vessiot de K .

On remarque que $(1, u)$ est un système fondamental de solutions, en effet $(1, u)$ est solution de l'équation $y'' - \frac{a'}{a}y' = 0$ et $w(1, u) = a \neq 0$, a est non nul par hypothèse puisque a n'est pas une dérivée dans K . Soit σ un K -automorphisme différentiel de $K(u)$, σu vérifie alors l'équation différentielle linéaire $y'' - \frac{a'}{a}y' = 0$ et puisque $(1, u)$ est un système fondamental de solutions $\sigma u = u + c$ où c appartient à C corps des constantes. D'où, à chaque automorphisme différentiel est associé une constante. De même si c est une constante, u et $u + c$ sont solutions

de l'équation $x' = a$. Ils ont alors un même type sur K , $K(u)$ est donc isomorphe à $K(u + c)$ par un K -isomorphisme différentiel qui associe u à $(u + c)$, mais $K(u + c) = K(u)$ car $c \in K$; donc à chaque constante est associé un automorphisme différentiel de $K(u)$. \square

Remarque 3. Si a est une dérivée dans K , c'est à dire s'il existe $b \in K$ tel que $b' = a$, donc si u est un élément vérifiant $u' = a = b'$, u appartient nécessairement à K , $K(u)$ est alors identique à K ; et le groupe de Galois différentiel de $K(u) = K$ est réduit à l'identité.

Lemme 6. Soit K un corps différentiel et u un élément satisfaisant l'équation $y' - ay = 0$, où a appartient à K , on suppose que $K(u)$ a le même corps de constantes que K . Alors $K(u)$ est une extension de Picard-Vessiot de K , et son groupe de Galois différentiel est isomorphe à un sous groupe multiplicatif du groupe des constantes non nul de K .

Preuve. On a ici deux cas à étudier

1er Cas. On suppose que pour aucun entier n on n'a dans K de solutions non nulles de $y' = nay$, alors la condition

$$\begin{cases} y' &= ay \\ y &\neq 0 \end{cases}$$

isole le type de u sur K si u est non nul et vérifie $y' = ay$. En effet, si on suppose que u vérifie une équation polynômiale à coefficients dans K , soit $f(X) = X^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$. En dérivant cette équation, on obtient

$$f'(X) = mX^{m-1}X' + \sum_{k=0}^{m-1} [a'_k X + ka_k X'] X^{k-1}$$

Comme $f(u)$ et $f'(u)$ sont supposés nulles on a:

$$f'(u) - maf(u) = \sum_{k=0}^{m-1} [a'_k + kaa_k - maa_k] u^k$$

Si on suppose que $f(X)$ est une équation de degré minimum vérifiée par u , on déduit que $a'_k + kaa_k - maa_k = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, m-2, m-1$. D'où $a'_k = (m-k)aa_k$ pour $k = 0, 1, \dots, m-1$. Comme par hypothèse cette équation n'a pas de solutions dans K non nulles, les coefficients a_k sont alors nulles, et $F(X) = X^m$. Ce qui entraîne $u^m = 0$, qui est absurde, il n'existe donc aucun polynôme à coefficients dans K qui est annulé par u .

La condition $\begin{cases} y' &= ay \\ y &\neq 0 \end{cases}$ isole le type de u sur K , d'après le Lemme

4, $K(u)$ est une extension de Picard-Vessiot de K .

Pour toute constante $c \neq 0$, cu est solution de l'équation $y' = ay$ car $(cu)' = cu' = acu$, les éléments u et cu ont le même type sur K , $K(u)$ est donc isomorphe à $K(cu)$ par un K -isomorphisme différentiel qui envoie u sur cu . De même si σ est un automorphisme différentiel de $K(u)$, σu vérifie l'équation $y' - ay = 0$ on a alors $(\sigma u/u)' = 0$ donc $\sigma u = cu$ où c est une constante non nulle.

Le groupe de Galois différentiel de l'extension $K(u)$ est alors isomorphe au groupe multiplicatif des constantes non nulles de K .

2-ième Cas.

Soit n le plus petit entier tel qu'il y ait une solution non nulle dans K de $y' = nay$, soit β . On remarque que u^n est aussi une solution de $y' = nay$ en effet: $(u^n)' = nu^{n-1}u' = nu^na$, car $u' = au$. On a donc $u^n = c\beta$, où c est une constante non nulle, u est alors algébrique sur K et $X^n - c\beta$ est le polynôme de plus petit degré annulé par u . En effet, s'il existe un polynôme, à coefficients dans K , de degré strictement inférieur à n annulé par u , soit $X^m + \sum_0^{m-1} a_k x^k$ avec $m < n$ on aura donc, en faisant le même calcul que dans le 1er cas $a'_k = (m-k)aa_k$ pour $k = 0, 1, \dots, m-1$. Seulement n est le plus petit entier tel qu'il y ait une solution non nulle dans K de $y' = nay$, comme $m-k < n$ car $m < n$, on déduit que les coefficients a_k sont tous nuls et par ailleurs $X^n - c\beta$ est le polynôme de plus petit degré à coefficients dans K annulé par u .

L'extension $K(u)$ est une extension de Picard-Vessiot de K puisque u est différent de zéro et $K(u)$ a le même corps de constantes que K . De même le groupe de Galois différentiel de $K(u)/K$ est isomorphe au groupe des racines n -ième de l'unité qui n'est qu'un sous groupe du groupe multiplicatif des constantes non nulles de K . En effet, si σ est un automorphisme différentiel de $K(u)$ fixant K , σu doit être solution de l'équation $X^n - c\beta = 0$ donc σu est égal au produit de u par une racine n -ième de l'unité. On remarque ici qu'une racine n -ième de l'unité est une constante car si $\varepsilon^n = 1$, on a en dérivant $n\varepsilon'\varepsilon^{n-1} = 0$, ε' est alors nul.

De même pour toute racine n -ième de l'unité ε , u et εu vérifient les mêmes équations. Ils ont alors un même type sur K . Il existe donc un K -automorphisme différentiel de $K(u)$ qui à u associe εu

□

4. Groupes algébriques des matrices

Soit F un corps et V un espace vectoriel de dimension n sur F , i.e l'ensemble des n -uples d'éléments de F . Soit $F[x_1, \dots, x_n]$ l'anneau des

polynômes en n indéterminés à coefficients dans F . On définit alors une topologie sur V , appelée topologie de Zariski, de la manière suivante, comme base de fermés, on prend l'ensemble des zéros des idéaux de $F[x_1, \dots, x_n]$, c'est un ensemble clos par intersection quelconque et par réunion fini. Dans toute la suite quand on parle de continuité ou plus généralement de topologie sur un groupe G , on considère toujours la topologie de Zariski sur G supposé comme espace vectoriel.

Lemme 7. *Soit G un groupe muni de la topologie de Zariski. Si les multiplications à droite et à gauche ainsi que l'application inversion sont des homéomorphismes de G dans G alors la composante connexe de l'identité est un sous groupe normal fermé.*

Preuve. Si G_1 est la composante connexe de l'identité elle est alors fermée (car $\overline{G_1} = G_1$); G_1^{-1} est aussi connexe puisque c'est l'image continue d'un connexe, G_1^{-1} contient 1 alors G_1^{-1} est contenue dans G_1 . Si $c \in G_1$ alors cG_1 est connexe et contient c , d'où cG_1 est contenu dans G_1 , ainsi on a bien G_1 est un sous groupe de G . Comme par hypothèse pour tout x dans G , $x^{-1}G_1x$ est connexe (car image par une application continue d'un connexe) et contient l'identité, $x^{-1}G_1x$ est alors contenue dans G_1 , ainsi G_1 est un sous groupe normal de G . \square

Notation 1. K est un corps contenant une infinité d'éléments.

V est un espace vectoriel de dimension fini sur K .

\mathcal{E} est un espace vectoriel des endomorphismes de V .

Dfinition 7. *Soit G un sous groupe du groupe des automorphismes de V , s'il existe un ensemble S de fonctions polynômes sur \mathcal{E} tel que G soit composé de tous les automorphismes s de V vérifiant $P(s) = 0$ pour tout P dans S , on dit que G est un groupe algébrique d'automorphisme, S est dit ensemble de définition de G .*

Thorme 2. *Le groupe de Galois différentiel d'une extension de Picard-Vessiot est un groupe algébrique de matrices sur le corps des constantes.*

Lemme 8. *Soit K un corps différentiel, C corps des constantes de K , $M = K(\bar{u})$ une extension de Picard-Vessiot de K . Il existe un ensemble S de polynômes à coefficients dans C tel que :*

1) *A chaque isomorphisme différentiel de M/K est associée une matrice de constantes satisfaisant S .*

2) *A chaque matrice non singulière (k_{ij}) de constantes de M satisfaisant S est associé un isomorphisme différentiel de M/k envoyant u_i sur $\sum_j k_{ij}u_j$.*

Preuve. Soit I le type de \bar{u} sur K (idéal différentiel premier de $K[\bar{X}]$ des équations annulées par \bar{u}). Soit x_{ij} $i, j = 1, 2, \dots, n, n^2$ indéterminées

sur M . L'application $y_i \rightarrow \sum_j x_{ij}u_j$ définit un homomorphisme différentiel de $K[\bar{y}]$ dans $M[x_{ij}]$, l'image de I est un idéal différentiel de $M[x_{ij}]$ noté Δ .

Soit ω_α une base de l'espace vectoriel M/C , on écrit chaque polynôme de Δ dans la base ω_α , les composantes sont des polynômes à coefficients constants, S est l'ensemble des composantes de tous les polynômes de Δ .

1) Soit σ un isomorphisme différentiel de M/k (dans la clôture différentielle de K).

$\sigma\bar{u} = (k_{ij})\bar{u}$ où (k_{ij}) est une matrice de constantes, car \bar{u} est un système fondamental de solutions, si on considère le composé de l'homomorphisme différentiel de $K[\bar{y}]$ dans $K[\bar{u}]$ qui à y_i associe u_i et de σ . L'image de I par cette composition est 0, car $\sigma\bar{u}$ a le même type que \bar{u} . On considère maintenant l'application de $K[\bar{y}]$ dans $M[x_{ij}]$ qui à y_i associe $\sum_j x_{ij}u_j$, composée avec l'application de $M[x_{ij}]$ dans M qui à x_{ij} associe k_{ij} . L'effet de cette composition est le même que celui de l'autre composition. L'image de I est alors 0 et donc l'image de Δ par l'application de $M[x_{ij}]$ dans M qui à x_{ij} associe k_{ij} est zéro. Comme les k_{ij} sont constants les composantes de chaque polynôme de Δ sont nulles pour les k_{ij} . \square

Pour la preuve du cas 2) on introduit le lemme suivant .

Lemme 9. *Si I et J sont deux idéaux différentiels premiers tels que I est contenu dans J et les degrés de transcendances de $K[\bar{a}]/K$ et $K[\bar{b}]/K$ sont finis et égaux. Alors $I = J$ (\bar{a} et \bar{b} annulent respectivement les équations de I et de J).*

Proof. On note le degré de transcendance de $K[\bar{a}]/K$ par $\langle K[\bar{a}]/K \rangle$. On a, $K[\bar{a}] = K[\bar{X}]/I$ (traduit par l'homomorphisme différentiel de $K[\bar{X}]$ dans $K[\bar{a}]$ qui à x_i associe a_i , le noyau de cet homomorphisme est I) de même $K[\bar{b}] = K[\bar{X}]/J$.

On considère une base de transcendance de $K[\bar{b}]/K$ (partie algébriquement libre maximale), soit $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. On relève cette base de transcendance par l'homomorphisme de $K[\bar{a}]$ dans $K[\bar{b}]$ qui à a_i associe b_i , en une partie algébriquement libre, soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. C'est une base de transcendance de $K[\bar{a}]/K$ car les degrés de transcendance de $K[\bar{a}]/K$ et de $K[\bar{b}]/K$ sont finis et égaux à n . On considère maintenant l'homomorphisme de $K(\bar{\alpha})[\bar{a}]$ dans $K(\bar{\beta})[\bar{b}]$, où $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, qui n'est autre que le composé des homomorphismes de $K(\bar{\alpha})[\bar{a}]$ dans $K(\bar{\beta})[\bar{a}]$ qui à α_i associe β_i et de l'homomorphisme de $K(\bar{\beta})[\bar{a}]$ dans $K(\bar{\beta})[\bar{b}]$ qui à a_i associe b_i . L'homomorphisme de $K(\bar{\alpha})[\bar{a}]$

dans $K(\bar{\beta})[\bar{b}]$ est donc un isomorphisme de corps puisque c'est un homomorphisme de corps (car \bar{a} et \bar{b} sont algébriques respectivement sur $K(\bar{\alpha})$ et $K(\bar{\beta})$ on a alors $K(\bar{\alpha})[\bar{a}] = K(\bar{\alpha})(\bar{a})$ et $K(\bar{\beta})[\bar{b}] = K(\bar{\beta})(\bar{b})$) et tout homomorphisme de corps est un isomorphisme, puisque le noyau est un idéal, il est donc soit réduit à l'élément neutre de l'addition, soit le corps de départ tout entier. Ce qui veut dire que l'homomorphisme est identiquement nul, donc si on suppose que l'homomorphisme de corps est non identiquement nul c'est un isomorphisme. Finalement l'isomorphisme de $K(\bar{\alpha}, \bar{a})$ dans $K(\bar{\beta}, \bar{b})$ induit un isomorphisme de $K[\bar{X}]/I$ dans $K[\bar{X}]/J$ et donc $I = J$. \square

Dans la suite on montre le cas 2) du Lemme.

Preuve du cas 2) du Lemme. On définit un homomorphisme différentiel de $K[\bar{y}]$ dans M qui à y_i associe $\sum_j k_{ij}u_j$, le noyau J de cet homomorphisme contient I (le type de \bar{u} sur K), car k_{ij} satisfait S . Les conditions du lemme 9 sont satisfaites, puisque \bar{u} et $\sigma\bar{u} = (k_{ij})\bar{u}$ vérifie une équation différentielle linéaire, les degré de transcendance de $K[\bar{u}]/K$ et de $K[\sigma\bar{u}]/K$ sont donc finis et égaux (le déterminant de la matrice (k_{ij}) est supposé non nul), alors $I = J$. On a donc un isomorphisme différentiel de $K[\bar{u}]$ dans $K[\sigma\bar{u}]$ qui à u_i associe $\sum_j k_{ij}u_j$. On peut prolonger cet isomorphisme aux corps des quotients c'est à dire à $M = K(\bar{u})$. Ainsi, on obtient un isomorphisme différentiel de M/K envoyant u_i sur $\sum_j k_{ij}u_j$. \square

Lemme 10. *Soit σ un automorphisme différentiel de M/K , si on note (C_{ij}) sa matrice correspondante. Alors $W_\sigma = \det |C_{ij}| \times W$.*

Preuve.

$$\sigma u_i = \sum_j c_{ij}u_j, \quad W_\sigma = |\sigma u_i^{(j)}| \text{ où } \begin{cases} j = 0, \dots, n-1 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

à la jème ligne et ième colonne on a $\sigma u_i^{(j-1)} = \sum_k c_{ik}u_k^{(j-1)}$ la matrice de Wronsky de $\sigma\bar{u}$ est donc égale au produit de la matrice de σ par la transposée de la matrice de Wronsky de \bar{u} , en considérant les déterminants on a bien $W_\sigma = |c_{ij}|W$. \square

Lemme 11. *Soit M_1 et M_2 deux extensions de Picard-Vessiot de K , si le plus petit corps contenant M_1 et M_2 ne contient pas de nouvelles constantes, c'est alors une extension de Picard-Vessiot de K .*

Proof. On remarque qu'on peut plonger M_1 et M_2 dans la clôture différentielle de K . On peut même plonger le corps composé $M_1 \sqcup M_2$ dans la clôture différentielle de K (car $M_1 \sqcup M_2$ ne contient pas de nouvelles constantes). Soit \bar{u}_1 et \bar{u}_2 les deux systèmes fondamentaux

de solutions respectifs de M_1 et de M_2 , soit \bar{v} une parties de la reunion de \bar{u}_1 et de \bar{u}_2 linéairement indépendantes sur les constantes, et tel que tous les conjugués de \bar{u}_1 et de \bar{u}_2 sont combinaisons linéaires de \bar{v} . On considère alors l'équation différentielle linéaire $W(X, \bar{v})/W(\bar{v})$ qui est à coefficients dans K , car si σ est un isomorphisme de la clôture différentielle de K on a $W(\sigma X, \sigma \bar{v})/W(\sigma \bar{v}) = W(X, \bar{v})/W(\bar{v})$, Lemme 10. $M_1 \sqcup M_2$ est donc une extension de Picard-Vessiot de K . \square

Lemme 12. *Une extension algébrique normale de degré fini est de Picard-Vessiot.*

Preuve. Soit \bar{u} un générateur fini de l'extension. On considère l'équation différentielle linéaire $W(X, \bar{u})/W(\bar{u})$, si σ est un isomorphisme différentiel de $M = k(\bar{u})$ c'est un automorphisme puisque l'extension est normale, et $W(\sigma X, \sigma \bar{u})/W(\sigma \bar{u}) = W(X, \bar{u})/W(\bar{u})$ l'équation est alors à coefficients dans K , et \bar{u} est un système fondamental de solutions de cette équation. D'autre part M/K a le même corps de constantes que K . En effet, si a est une constante dans M qui n'est pas dans K alors a est algébrique sur K , puisque M/K est algébrique, donc a est algébrique sur C . Seulement C est supposé algébriquement clos, a est alors nécessairement dans le corps des constantes de K . \square

Thorme 3. *Une extension de Picard-Vessiot est normale.*

Preuve. Soit $M = K(\bar{u})$ une extension de Picard-Vessiot de K , M peut donc être plongée dans la clôture différentielle de K . Pour tout élément z de M qui n'est pas dans K il existe donc un isomorphisme σ de la clôture différentielle vérifiant $\sigma z \neq z$. Comme $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ est un système fondamental de solutions, $\sigma \bar{u}$ est aussi un système fondamental de solutions. on a: $\sigma u_i = \sum_j k_{ij} u_j$, où (k_{ij}) est une matrice de constantes, σ est donc un automorphisme différentiel de M/K et le théorème est ainsi démontré. \square

Lemme 13. *Si M est une extension de Picard-Vessiot de K , L corps différentiel intermédiaire entre M et K , alors M est une extension de Picard-Vessiot de L .*

Preuve. M à le même corps de constantes que L et K , puisque M est une extension de Picard-Vessiot de K . Soit \bar{v} une partie de \bar{u} linéairement indépendante sur L . On considère l'équation différentielle linéaire $W(X, \bar{v})/W(\bar{v})$. Si σ est un automorphisme différentiel de M/L , on a $W(\sigma X, \sigma \bar{v})/W(\sigma \bar{v}) = W(x, \bar{v})/W(\bar{v})$. L'équation est donc à coefficients dans L . \square

Dfinition 8. *Pour tout corps différentiel intermédiaire L , on définit L' comme étant le sous groupe de G de tous les automorphismes différentiels*

gardant L élément par élément fixe. L' est donc le groupe de Galois différentiel de M/L . Pour tout sous groupe H de G , on définit H' comme étant l'ensemble des invariants de H dans M . H' est donc un corps différentiel intermédiaire entre K et M . On dit qu'un groupe ou un corps est fermé s'il est égal à son double prime.

Thorme 4. Soit M une extension de Picard-Vessiot de K , il y a une bijection entre les corps différentiels intermédiaires et les sous groupes algébriques du groupe de Galois différentiel de M/K .

Preuve. Soit H un sous groupe de G , on a alors $H' = \text{Invariant}H = \text{Inv}H$, et $H'' = G(M/\text{Inv}H)$. Montrons que H est Zariski dense dans H'' . Pour cela, on fait une démonstration par l'absurde. On suppose le contraire, il existe donc un polynôme f en n^2 variable à coefficients dans C , corps des constantes, qui s'annule sur H sans toute fois s'annuler sur H'' . On étudie le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, la méthode étant la même pour tout ordre.

Soit donc $M = K(u, v)$, la matrice de Wronsky de (u, v) étant non singulière, soit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ sa matrice inverse. Soit y et z deux indéterminées

différentielles sur M . On pose $F(y, z) = f(Ay + By', Az + Bz', Cy + Dy', Cz + Dz')$. On pose $y = \sigma u$ et $z = \sigma v$ pour σ dans H . On a alors: $F(\sigma u, \sigma v) = 0$, pour tout σ dans H , car f s'annule sur H et non sur H'' . d'où $F(\sigma u, \sigma v)$ n'est pas nul pour tout σ dans H'' . Parmi les polynômes de $M[y, z]$ ayant cette propriété, on choisit E ayant en plus le moins possible de termes. L'un des coefficients des monômes de E peut être pris égal à 1.

Pour τ dans H , soit E_τ le polynôme obtenu en remplaçant dans E les coefficients par leurs images par τ . On a alors $E_\tau(x, y) = \tau E(\tau^{-1}x, \tau^{-1}y)$, $E_\tau(\sigma u, \sigma v) = 0$ pour tout σ dans H . De même $E - E_\tau$ à moins de monome que E , puisque l'un des coefficients de E est 1. Comme $(E - E_\tau)(\sigma u, \sigma v) = 0$, pour tout σ dans H . Il doit être aussi nul pour tout σ dans H'' . Si $E - E_\tau \not\equiv 0$, il existerait, donc, un élément γ de M tel que $E - \sigma(E - E_\tau)$ ait moins de monômes que E , et il serait nul pour tout σ dans H , et non pour tout σ dans H'' . Seulement on a supposé que E est le polynôme le plus court ayant cette propriété. On déduit, alors, que $E - E_\tau \equiv 0$, ce qui veut dire que les coefficients de E sont dans H' . On a, donc, $E(\sigma u, \sigma v) = 0$ pour tout σ de H'' , car les coefficients de E sont invariants par les éléments de H'' . H est alors Zariski dense dans H'' .

Soit maintenant L un corps différentiel intermédiaire. Montrons que L est fermé au sens de la théorie de Galois, c'est à dire $L'' = L$. Le lemme 13 entraîne que M/L est une extension de Picard-Vessiot, M/L

est donc une extension normale (Théorème 3). D'autre part L est inclus dans L'' , s'il existe un élément a de L'' qui n'est pas dans L on a par définition de L'' , $\sigma a = a$ pour tout automorphisme σ de M/L , comme M/L est normale il existe un automorphisme τ de M/L qui déplace a et donc $\tau a \neq a$, il y a une contradiction et L'' est alors identique à L . \square

Lemme 14. *Si x est une indéterminée différentielle, le corps des constantes de $K(x)$ est le même que celui de K .*

Preuve. Soit $\frac{f}{g}$ un élément irréductible constant de $K(x)$, comme sa dérivée est nulle, $f'g$ est alors identique à fg' . Soit N et M les ordres respectifs de f et de g , si on suppose que N est strictement supérieur à M , le coefficient du terme d'ordre $(N+1)$ dans l'équation soit $g \frac{\partial f}{\partial x^{(N)}}$ est nécessairement nul (puisque x est différentiellement transcendant sur K), comme g est non nul $\frac{\partial f}{\partial x^{(N)}}$ l'est obligatoirement, f et g sont donc dans K et $\frac{f}{g}$ est une constante de K . Supposons que $N = M$ en identifiant les monômes d'ordre maximal dans l'égalité $f'g = fg'$. On a, $g \frac{\partial f}{\partial x^{(N)}} = f \frac{\partial g}{\partial x^{(N)}}$, comme g n'a pas de facteurs communs avec f , g divise alors sa dérivée par rapport à $X^{(N)}$, $\frac{\delta g}{\delta x^{(N)}}$ est donc nul et $\frac{f}{g}$ est une constante de K . \square

Thorme 5. *Il existe des extensions de Picard-Vessiot pour lesquelles le groupe de Galois différentiel est tout le groupe linéaire $GL(n)$.*

Preuve. Soit K_0 un corps différentiel, son sous-corps des constantes C est supposé algébriquement clos. Soit $M = K_0(x_1, \dots, x_n)$ le corps obtenu en adjoignant à K_0 n indéterminées différentielles. D'après le lemme 14, M ne contient pas de nouvelles constantes. Soit T une transformation linéaire non singulière à coefficients dans C , $Tx_i = \sum_j c_{ij}x_j$, $c_{ij} \in C$. On définit T sur tout M , en décrivant son action sur les dérivées des indéterminées, $Tx_i^{(m)} = \sum_j c_{ij}x_j^{(m)}$. La transformation T , ainsi définie, est donc un automorphisme différentiel de M . Si on note K le sous-corps de M invariant par toutes les transformations du type T , $\frac{W(y, x_1, \dots, x_n)}{W(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ est une équation différentielle linéaire en y à coefficients dans K , (x_1, x_2, \dots, x_n) est un système fondamental de solution de cette équation, M est alors une extension de Picard-Vessiot de K et le groupe de galois différentiel de M/K est tout le groupe linéaire $Gl(n)$. \square

Quelques définitions. Un groupe algébrique d'automorphismes est dit irréductible si son idéal associé est premier.

On appelle dimension d'un groupe algébrique irréductible d'automorphisme le degré de transcendance de l'anneau $\frac{C[\bar{x}]}{S[\bar{x}]}$ par rapport à C .

On appelle dimension d'un groupe algébrique quelconque la dimension du groupe algébrique d'indice fini contenant l'élément neutre du groupe.

Dans cette définition C désigne le ceps des constantes.

$C[\bar{x}]$: l'anneau des polynômes en n^2 variables à coefficients dans C .

$S[\bar{x}]$; l'idéal associé au groupe algébrique d'automorphismes.

Lemme 15. *Soit K un corps différentiel, C son sous-corps des constantes, (k_1, k_2, \dots, k_r) des constantes dans un sur corps différentiel de K . Si (k_1, k_2, \dots, k_r) sont algébriquement dépendantes sur K alors elles sont algébriquement dépendantes sur C .*

Preuve. Soit $f(k_1, k_2, \dots, k_r) = 0$ une relation polynômiale à coefficients dans K . On considère une base de l'espace vectoriel K/C , soit u_α . En écrivant f dans la base u_α , on obtient $f = \sum_\alpha h_\alpha u_\alpha$. Pour montrer que $h_\alpha(k_1, k_2, \dots, k_r) = 0$, il suffit de prouver que les u_α sont linéairements indépendants dans $K(k_1, k_2, \dots, k_r)$. Ceci est vrai puisque le Wronskien de toute partie finie des u_α est non nul. Comme h_α est un polynôme à coefficients dans C alors (k_1, k_2, \dots, k_r) sont algébriquement dépendantes sur C . \square

Lemme 16. *Si le degré de transcendance de $K(\bar{u})/K$ est fini, et si K est contenu dans L , on peut alors étendre le type de \bar{u} sur K en un type sur L et si \bar{v} satisfait ce type on a en plus les degrés de transcendance de $K(\bar{u})/K$ et de $L(\bar{v})/L$ sont égaux.*

Preuve. Premier cas: $\bar{u} = u_1$.

On note le degré de transcendance de $K(\bar{u})/K$ par $\langle K(\bar{u})/K \rangle$. On a, $\langle K(u_1)/K \rangle$ est fini, d'après la propriété du prolongement de type (voir [4] ch III). Le type de u_1 sur K à un fils non deviant sur L , si v_1 satisfait ce type on a :

$$\langle K(u_1)/K \rangle = \langle L(v_1)/L \rangle$$

Deuxième cas: $\bar{u} = (u_1, u_2)$.

Le type de u_1 à un fils non deviant sur L satisfait par v_1 , de même le type de u_2 sur $K(u_1)$ à un fils non deviant sur $L(v_1)$ satisfait par v_2 , d'après le théorème d'additivité des degrés de transcendance on a : $\langle K(u_1, u_2)/K \rangle = \langle L(v_1, v_2)/L \rangle$. Si $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, par induction, le type de $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ à un fils non deviant sur L satisfait par $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$, de même le type de u_n sur $K(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ à un fils

non deviant sur $L(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ satisfait par v_n le lemme est ainsi prouvé. \square

Thorme 6. *Soit M une extension de Picard-Vessiot de K . La dimension du groupe de Galois différentiel de M/K est égale au degré de transcendance de M/K .*

Preuve. On remarque que le degré de transcendance de $M = K(\bar{u})/K$ est fini. En effet $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n . Le degré de transcendance de $K(u_1, u_2, \dots, u_j)/K(u_1, u_2, \dots, u_{j-1})$ est au plus égal à n . D'après le théorème d'additivité des degrés de transcendance $\langle K(\bar{u})/K \rangle$ est au plus égal à n^2 . Soit L une extension de K , si \bar{u} est un système fondamental de solutions dans L , on peut étendre le type de \bar{u} sur K en un type sur L , si \bar{v} satisfait ce type, on a :

$$\langle K(\bar{u})/K \rangle = \langle L(\bar{v})/L \rangle$$

(Lemme 16)

On a alors $\bar{v} = A\bar{u}$ où A est une matrice de constantes dans une certaine extension de L . Le degré de transcendance de $L(\bar{v})$ par rapport à L est donc égal au degré de transcendance de $L(A)$ par rapport à L qui est égal au degré de transcendance de $L(A)$ par rapport à C (d'après le lemme 15) qui est aussi égal au degré de transcendance de l'anneau $C[A\bar{X}]/S[A\bar{X}]$ qui n'est autre que la dimension du groupe de Galois différentiel de M/K . \square

Dfinition 9. *Soit M une extension de Picard-Vessiot de K . On appelle clôture algébrique relative de K dans M la plus grande extension algébrique de K dans M .*

Corollaire 1. *La composante connexe de l'identité dans G lui correspond la clôture algébrique relative de K dans M .*

Preuve. La composante connexe G_1 de l'identité dans G est le plus petit sous groupe algébrique d'indice fini contenant l'identité dans G . La dimension de G_1 est égale à la dimension de G (voir [1] ch II Prop 6.4), comme la dimension de G_1 est égale au degré de transcendance de l'extension M/L (M est une extension de Picard-Vessiot de L), l'extension L/K est alors algébrique et c'est la plus grande extension algébrique de K dans M , puisque G_1 est le plus petit sous groupe algébrique d'indice fini contenant l'identité dans G . Dans cette démonstration L est le corps différentiel intermédiaire entre M et K correspondant à la composante de l'identité. \square

REFERENCES

- [1] Chevalley, C., “Théorie des Groupes De Lie”, Tome II, Hermann, Paris, 1951.
- [2] Ehresman, S., “Exposé élémentaire de la théorie de la stabilité”, Groupe d’étude de Théories stables, 1re année, 1977/78, n^o 1, Université Pierre et Marie Curie.
- [3] Pozat, B., “Rang des types dans les corps différentiels”, Groupe d’étude de Théories stables, 1re année, 1977/78, n^o 6, Université Pierre et Marie Curie.
- [4] Poizat, B., “Théorie Des Modeles”, cours 3ème cycle 78-79, Université Pierre et Marie Curie.
- [5] Kaplansky, I., “An introduction to differential algebra”, Actualités Sci. Ind. 1251, Hermann, Paris 1957.
- [6] Kolchin, E. R., “Differential algebra and algebraic groups”, Pure and applied mathematics 54, Academic Press, New York, 1973.

LOTFI SAÏDANE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS, UNIVERSITÉ DE TUNIS EL-MANAR, 2092 EL-MANAR I, TUNIS
E-mail address: Lotfi.saidane@fst.rnu.tn